VECTEURS

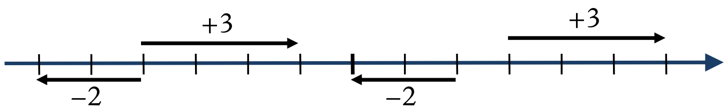
I. MESURE ALGÉBRIQUE

BIPOINT

Un **bipoint** est un couple de points, c'est-à-dire deux points, donnés dans un certain ordre. Exemple : $(A;B)$.

REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE RELATIF

Un nombre relatif peut se représenter par une *position* sur un axe. Mais on peut l'interpréter aussi comme un *trajet*. Ainsi, le nombre $+3$ s'interprètera : « on <u>avance</u> (sur l'axe) de 3 unités » et le nombre -2 s'interprètera : « on <u>recule</u> de 2 unités ». Peu importe le point de départ. Si l'on représente le trajet par une <u>flèche</u>, cette flèche pourra être placée à différents endroits de l'axe :



MESURE ALGÉBRIQUE

Sur un axe donné, prenons deux points A et B. La **mesure algébrique** du *bipoint* $(A;B)$, ou, pourrait-on dire la mesure algébrique <u>de</u> A <u>à</u> B est le <u>nombre relatif</u> qui représente le trajet allant de A à B. On la note $\overline{AB}$ et on lit : « mesure algébrique de A B » (ou « mesure algébrique de A <u>à</u> B »).

Par exemple, sur le dessin ci-dessous, $\overline{AB}=+3$ et $\overline{BA}=-3$.

OPPOSÉ

$\boxed{-\overline{AB} = \overline{BA}}$.

MULTIPLICATION PAR UN NOMBRE NÉGATIF

$\boxed{-3\overline{AB} = 3\overline{BA}}$.

RELATION DE CHASLES

Par définition de l'addition des nombres relatifs, quels que soient les points A, B et C choisis sur l'axe, on a : $\boxed{\overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AC}}$.

Cette égalité, toujours vraie, se nomme **relation de Chasles**.

ABSCISSE

Notons <u>O l'origine de l'axe</u>. Soit A un point de l'axe, d'abscisse x. On a : $\boxed{x=\overline{OA}}$.

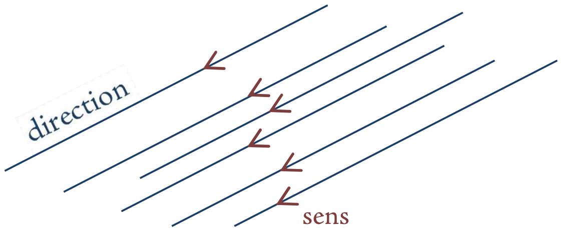
DISTANCE

Soient A et B deux points de l'axe. On a : $\boxed{AB = \left|\overline{AB}\right|}$.

II. LA NOTION DE VECTEUR

DIRECTION / SENS

Dans la langue courante, les mots *direction* et *sens* sont parfois synonymes. En géométrie, la **direction** est la propriété commune à toutes les droites parallèles à une même droite donnée. Une fois qu'une direction est choisie, il ne reste que deux **sens** possibles.



« DÉFINITION »

Le **vecteur** est un objet mathématique qui réunit les trois informations d'un « déplacement » : $\begin{cases}\text{direction}\\ \text{sens}\\ \text{distance}\end{cases}$

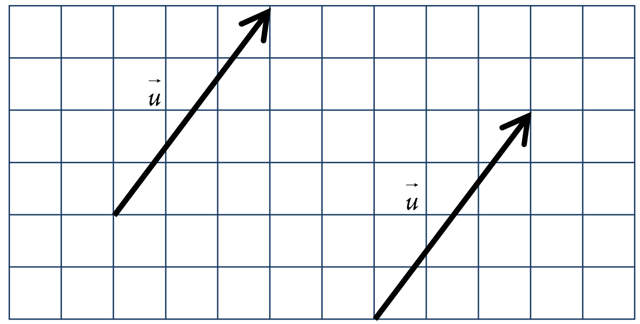
L'information « distance » s'appelle la **norme** du vecteur. Le déplacement en question se nomme **translation**.

DÉSIGNATION

Pour bien distinguer les vecteurs des nombres dans les calculs vectoriels (qui mélangent les deux), au lycée, on désigne les vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche : « $\vec{u}$ ».

REPRÉSENTATION

On peut représenter un vecteur par une flèche. Mais c'est une flèche dont seules comptent les caractéristiques de direction, sens et distance. La position de la flèche ne compte pas. Ainsi, les deux flèches ci-dessous représentent **le même** vecteur :



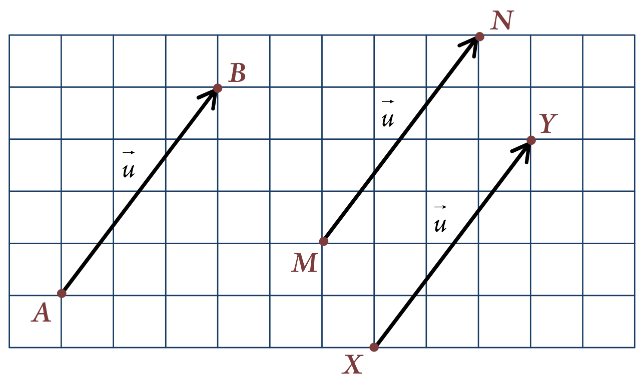
EXPRESSION

Le vecteur qui donne les informations (direction, sens, distance) permettant d'aller d'un point A à un point B se note : $\boxed{\overrightarrow{AB}}$.

On lit « vecteur A B », mais on pourrait dire aussi « vecteur de A à B » ou vecteur du bipoint $(A;B)$.

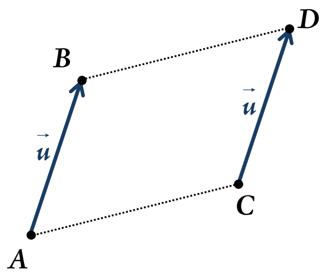
REPRÉSENTANT

Une flèche n'est qu'un dessin et n'a donc pas le statut d'objet mathématique. Son équivalent rigoureux est le *bipoint*. A et B étant deux points du plan (ou, si l'on veut, de l'espace) et $\vec{u}$ étant un vecteur, le bipoint $(A;B)$ est appelé un **représentant** du vecteur $\vec{u}$ lorsque $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Un vecteur a une infinité de *représentants*.



Caractérisation vectorielle du parallélogramme

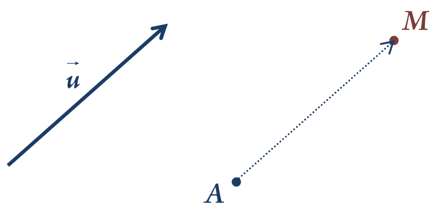
Soient A, B, C et D quatre points. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **<u>si et seulement si</u>** $AB\underline{D}C$ est un parallélogramme.



Unicité du « translaté »

Soient A un point donné et $\vec{u}$ un vecteur donné. Il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$.

M est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.



Colinéarité

Lorsque des vecteurs ont même *direction* (mais pas forcément même *sens*), on ne dit pas qu'ils sont « parallèles », on dit qu'ils sont **colinéaires**.

Vecteur directeur

Lorsqu'un vecteur et une droite ont même *direction*, on ne dit pas que le vecteur est « parallèle » à la droite, mais qu'il est un **vecteur directeur** <u>de</u> cette droite. (Nous préciserons plus loin cette définition.)

Orthogonalité

On ne dit pas que des vecteurs sont « perpendiculaires », on dit qu'ils sont **orthogonaux**. « $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ » se note : $\boxed{\vec{u}\perp\vec{v}}$.

Vecteur normal

Lorsqu'un vecteur et une droite ont des directions orthogonales, le vecteur est dit **normal** à la droite.

Norme

On ne parle pas de la « longueur » d'un vecteurs, mais de sa **norme**.

La *norme* de $\vec{u}$ se note : $\boxed{\left\|\vec{u}\right\|}$.

On a donc : $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=AB}$

Plan vectoriel

L'ensemble de tous les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points du plan est appelé **plan vectoriel**.

III. Addition vectorielle

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On choisit un point A quelconque du plan. Soit B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$. Soit C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$.

<u>On pose</u> : $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Opposé

$\boxed{-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}}$

Vecteur nul

A étant un point quelconque, $\overrightarrow{AA}$ est encore considéré comme un vecteur. Il se nomme le **vecteur nul** et se note : $\vec{0}$. Le vecteur nul est censé avoir :

- Toutes les *directions* à la fois
- Pas de *sens*
- Une *norme* égale à 0.

Le *vecteur nul* est donc *colinéaire* (et *orthogonal*) à tous les vecteurs.

Le vecteur nul permet de caractériser vectoriellement l'égalité de deux points : $\boxed{\overrightarrow{AM}=\vec{0} \iff M=A}$

Seul le vecteur nul a une norme nulle : $\boxed{\|\vec{u}\|=0 \iff \vec{u}=\vec{0}}$

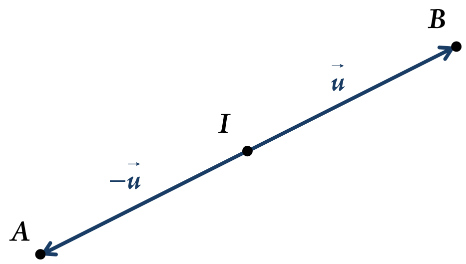
L'existence du vecteur nul nous oblige à préciser la notion déjà abordée de *vecteur directeur* d'une droite :

Vecteur directeur

Un **vecteur directeur** d'une droite est un vecteur **non nul** qui a même direction que cette droite.

Caractérisation vectorielle du milieu

« I milieu de $[AB]$ » peut se traduire vectoriellement par : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$



Soustraction

Il n'y a pas besoin, à proprement parler, de soustraction de vecteurs. Il suffit d'interpréter les différences comme des **sommes algébriques** : $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$ s'interprète : $(\vec{u})+(-\vec{v})+(\vec{w})$.

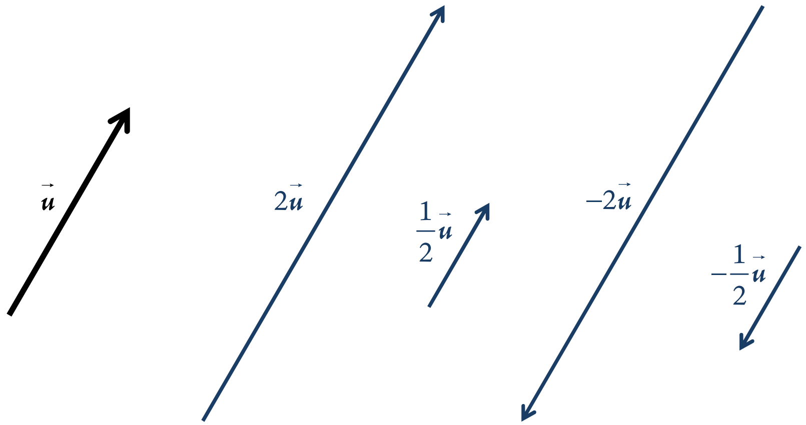
Une simple différence comme : $\vec{u}-\vec{v}$ doit systématiquement être pensée comme : $\vec{u}+(-\vec{v})$.

IV. Multiplication externe

Définition

Soient α un réel et $\vec{u}$ un vecteur.

- Si $\alpha\neq 0$ et $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\alpha\vec{u}$ est le vecteur ayant :
  - même *direction* que $\vec{u}$
  - même *sens* si $\alpha>0$ et *sens* opposé si $\alpha<0$
  - pour *norme* : $|\alpha|\times\|\vec{u}\|$
- Si $\alpha=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$, $\alpha\vec{u}$ est le vecteur nul.



DÉFINITION VECTORIELLE DE L'HOMOTHÉTIE

Soit O un point. Soit k un réel non nul. Soient M et M' deux points. On dit que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k lorsque $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

V. CALCUL VECTORIEL

RÉSUMÉ

On a défini sur les vecteurs une addition, un signe opposé et une multiplication d'un vecteur par un nombre. Ces opérations obéissent à des règles similaires à celles des opérations de même nom sur les nombres relatifs.

Voici les huit propriétés algébriques élémentaires qui caractérisent ce la notions assez large d'**espace vectoriel** :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et quels que soient les *scalaires* α et β, on a :

$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}=\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ *associativité de l'addition*

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ *existence d'un élément neutre de l'addition*

$\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)=\vec{0}$ *élément symétrique de chaque vecteur (pour l'addition)*

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ *commutativité de l'addition*

$(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ *distributivité à droite*

$\alpha\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ *distributivité à gauche*

$\alpha\left(\beta\vec{u}\right)=(\alpha\beta)\vec{u}$ *pseudo-associativité*

$1\vec{u}=\vec{u}$ *l'élément neutre de l'ancienne multiplication est aussi celui de l'externe*

On a en outre (ce qui rattache le signe moins-opposé à la multiplication externe) : $-\vec{u}=(-1)\vec{u}$

À ces règles, il faut ajouter celles qui sont propres à la notation « *bipointesque* » (cf. p**Erreur ! Signet non défini.**) :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ *Relation de Chasles*

$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ En conséquence, on a par exemple : $-3\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BA}$.

Les *sommes algébriques* s'interprètent comme avec les relatifs :
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ doit se lire : $\overrightarrow{AB}$ $-\overrightarrow{BC}$ et signifie : $\overrightarrow{AB}$ + $\left(-\overrightarrow{BC}\right)$.

DIVISION

Nous n'avons pas défini de division d'un vecteur par un nombre. Donc, au d'écrire « $\frac{\vec{u}}{2}$ », on écrira : $\frac{1}{2}\vec{u}$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un réel non nul. On a :
$k\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}=\frac{1}{k}\vec{v}$